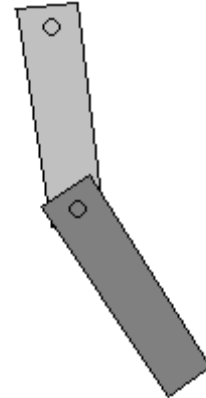


喜多方工業高校 高橋善樹

振幅を制限しない振り子では、微小振動の近似が使えず、運動方程式は非線形となる。とりわけ2重以上の連成振り子の場合、その運動はカオス的となり、初期条件のわずかな変動によって、ある時間経過後の運動状態がまったく異なる、いわゆる「バタフライ効果」が現れる。本考察の目的は、2重連成実体振り子の運動方程式を数値解析し、シミュレーションソフトによる結果及び実験結果との比較をしながら、そのカオスに迫ろうとするものである。



$m := 1$   
 $m := m$   
 $l := 1$   
 $l := l$   
 $\theta := 1$   
 $\theta := \theta$

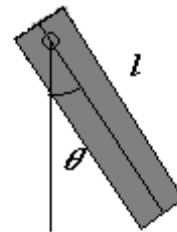
## 1. 実体棒振り子

簡単な実体振り子として、太さが無視できる棒の、一端を支点とする運動を考える。長さを  $l$ 、質量を  $m$  とすれば、慣性モー

メント  $I := \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2$  を用いて運動方程式を立てれば、

$$\theta'' = \frac{-m \cdot g \cdot l}{I} \cdot \sin(\theta) \rightarrow \theta'' = -3 \cdot \frac{g}{l} \cdot \sin(\theta)$$

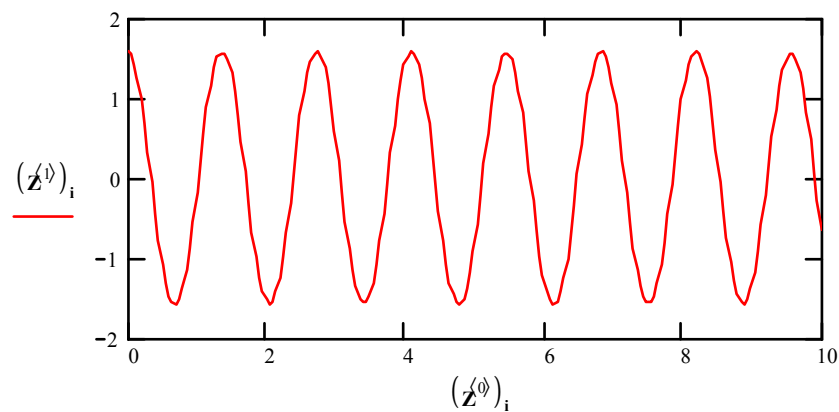
となり、実質的に長さ  $\frac{l}{3}$  の単振り子に同等である。



Mathcadの微分方程式の数値解法によれば、 $l := 1 \text{ [m]}$ 、初期条件

$\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ 、 $\theta'(0) = 0$  のときの  $\theta(t)$  の変化は次のようになる。

$$\theta := \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, \theta) := \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \frac{-3g}{l} \sin(\theta_0) \end{pmatrix} \quad Z := \text{rkfixed}(\theta, 0, 10, 200, D) \quad i := 0 \dots 200$$



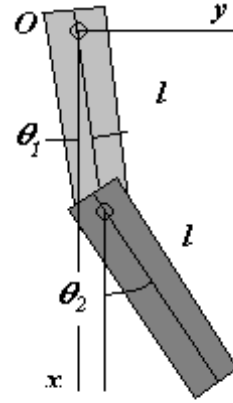
$l := 1$   
 $l := l$

## 2. 連成棒振り子

さて、連成棒振り子にとりかかろう。簡単のため長さ  $l$ 、質量  $m$  の  
同じ2本の棒の連結を考えることにする。

2本の棒の重心の座標および、速度成分は以下の通りである。

$$\begin{aligned}x_1 &:= \frac{1}{2} l \cdot \cos(\theta_1) & y_1 &:= \frac{1}{2} \cdot l \cdot \sin(\theta_1) \\x_2 &:= 2x_1 + \frac{1}{2} l \cdot \cos(\theta_2) & y_2 &:= 2 \cdot y_1 + \frac{1}{2} \cdot l \cdot \sin(\theta_2) \\x'_1 &:= -\frac{1}{2} l \cdot \theta'_1 \cdot \sin(\theta_1) & y'_1 &:= \frac{1}{2} \cdot l \cdot \theta'_1 \cdot \cos(\theta_1) \\x'_2 &:= 2 \cdot x'_1 - \frac{1}{2} l \cdot \theta'_2 \cdot \sin(\theta_2) & y'_2 &:= 2 \cdot y'_1 + \frac{1}{2} \cdot l \cdot \theta'_2 \cdot \cos(\theta_2)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\theta_1 &:= 1 \\ \theta_1 &:= \theta_1 \\ \theta_2 &:= 1 \\ \theta_2 &:= \theta_2 \\ \theta'_1 &:= 1 \\ \theta'_1 &:= \theta'_1 \\ \theta'_2 &:= 1 \\ \theta'_2 &:= \theta'_2\end{aligned}$$

したがって、系のラグランジアン  $L$  は、次のようになる。  $I := \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$

$$K := \frac{m}{2} \cdot (x'_1{}^2 + y'_1{}^2 + x'_2{}^2 + y'_2{}^2) + \frac{I}{2} \cdot (\theta'^2_1 + \theta'^2_2)$$

$$U := -m \cdot g \cdot (x_1 + x_2) \quad L := K - U$$

ラグランジュの運動方程式を立てる。

$$\partial L_1 := \frac{d}{d\theta_1} L \quad \partial L_2 := \frac{d}{d\theta_2} L$$

$$\begin{aligned}g &:= 1 \\ g &:= g \\ t &:= 1 \\ t &:= t \\ \theta''_1 &:= 1 \\ \theta''_1 &:= \theta''_1 \\ \theta''_2 &:= 1 \\ \theta''_2 &:= \theta''_2\end{aligned}$$

$$\partial L_1'(\theta_1, \theta_2, \theta'_1, \theta'_2) := \frac{d}{d\theta'_1} L \quad \partial L_2'(\theta_1, \theta_2, \theta'_1, \theta'_2) := \frac{d}{d\theta'_2} L$$

$$\theta_{11} := \theta_1 + \theta'_1 \cdot t \quad \theta_{22} := \theta_2 + \theta'_2 \cdot t$$

$$\theta'_{11} := \theta'_1 + \theta''_1 \cdot t \quad \theta'_{22} := \theta'_2 + \theta''_2 \cdot t$$

$$d_t(f) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} f$$

$$d_t(\partial L_1'(\theta_{11}, \theta_{22}, \theta'_{11}, \theta'_{22})) \cdot \frac{1}{m \cdot l^2} \text{ simplify } \rightarrow \frac{4}{3} \cdot \theta''_1$$

$$\partial L_1 \cdot \frac{1}{m \cdot l^2} \text{ expand } \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \theta'_1 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \theta'_2 \cdot \sin(\theta_2) - \frac{1}{2} \cdot \theta'_1 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \theta'_2 \cdot \cos(\theta_2) - \frac{3}{(2 \cdot l)} \cdot g \cdot \sin(\theta_1)$$

$$d_t(\partial L_2'(\theta_{11}, \theta_{22}, \theta'_{11}, \theta'_{22})) \cdot \frac{1}{m \cdot l^2} \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \theta''_2$$

$$\partial L_2 \cdot \frac{1}{m \cdot l^2} \text{ expand } \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \theta'_1 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \theta'_2 \cdot \cos(\theta_2) - \frac{1}{2} \cdot \theta'_1 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \theta'_2 \cdot \sin(\theta_2) - \frac{1}{(2 \cdot l)} \cdot g \cdot \sin(\theta_2)$$

運動方程式は、結局、

$$\begin{aligned}\theta''_1 &= \frac{3}{8} \cdot \left( \theta'_1 \cdot \theta'_2 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1) - \frac{3}{l} \cdot g \cdot \sin(\theta_1) \right) \\ \theta''_2 &= \frac{3}{2} \cdot \left( -\theta'_1 \cdot \theta'_2 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{l} \cdot g \cdot \sin(\theta_2) \right)\end{aligned}$$

$l := 1$  [m], 初期条件  $\theta_1(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta_2(0) = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\theta'_1(0) = \theta'_2(0) = 0$  のとき数値積分を実行すれば,

$$g := 9.8$$

$$\boldsymbol{\theta} := \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\theta}) := \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \frac{3}{8} \cdot \left( \theta_2 \cdot \theta_3 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_0) - \frac{3}{1} \cdot g \cdot \sin(\theta_0) \right) \\ \frac{3}{2} \cdot \left( -\theta_2 \cdot \theta_3 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_0) - \frac{1}{1} \cdot g \cdot \sin(\theta_1) \right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} := \text{rkfixed}(\boldsymbol{\theta}, 0, 8, 400, \mathbf{D})$$

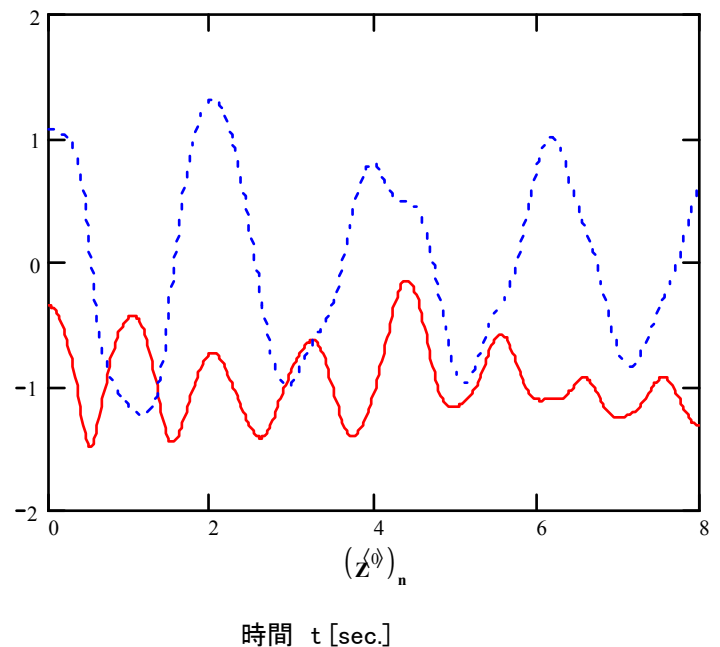
$$x_2 \rightarrow l \cdot \cos(\theta_1) + \frac{1}{2} \cdot l \cdot \cos(\theta_2)$$

$$n := 0 .. 400$$

$$y_2 \rightarrow l \cdot \sin(\theta_1) + \frac{1}{2} \cdot l \cdot \sin(\theta_2)$$

棒2の重心の  
垂直位置  
棒2の重心の  
水平位置

$$\begin{aligned} & -l \left[ \cos\left[\left(\dot{Z}^{(1)}\right)_n\right] + \frac{1}{2} \cos\left[\left(\dot{Z}^{(2)}\right)_n\right] \right] \\ & l \left[ \sin\left[\left(\dot{Z}^{(1)}\right)_n\right] + \frac{1}{2} \sin\left[\left(\dot{Z}^{(2)}\right)_n\right] \right] \end{aligned}$$



Interactive Physics によるシミュレーションの結果は、次の通りである。なお、このシミュレーションでは、棒どうしが衝突することなく自由に回転可能としており、その限りでは上の数値解析に一致している。

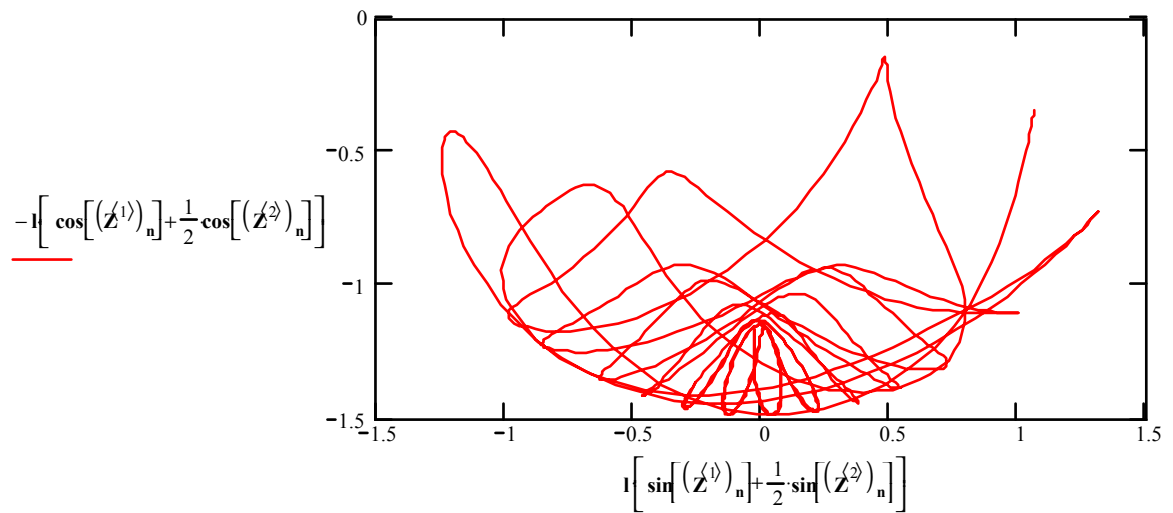
### 3. 連成振り子にカオスを見る

以上の結果を利用して、連成振り子の運動を多面的にながめてみよう。

まず、2番目の棒の重心の軌跡を見てみる。

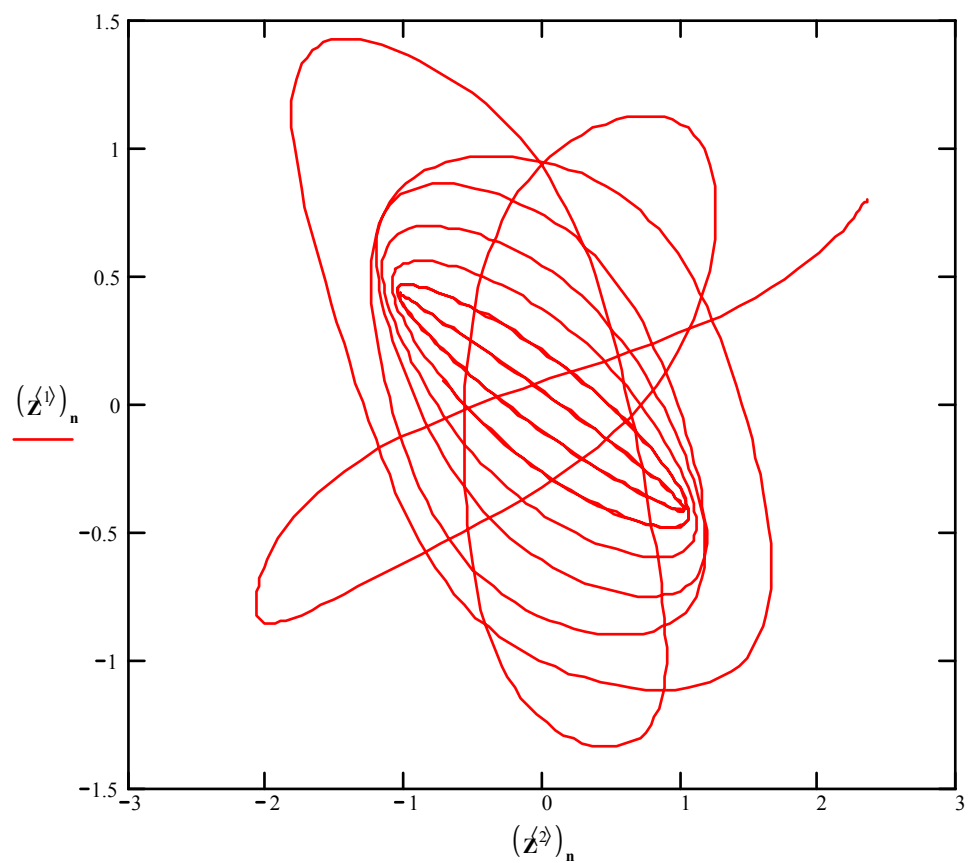
$Z := \text{rkfixed}(\theta, 0, 20, 1000, D)$

$n := 0 \dots 1000$



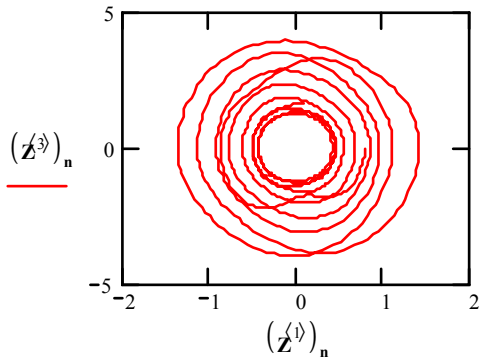
実に複雑な軌跡をたどっており、カオスの香りがただよっている。

次に、視点を変えて棒1および2の角変位を直角座標にプロットしてみたのが下のグラフである。

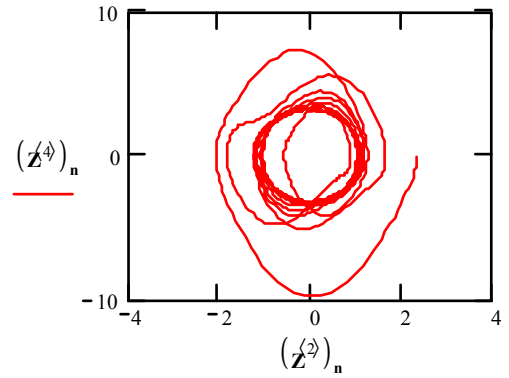


続いて、位相空間における軌跡を、視点を変えながら見てみよう。

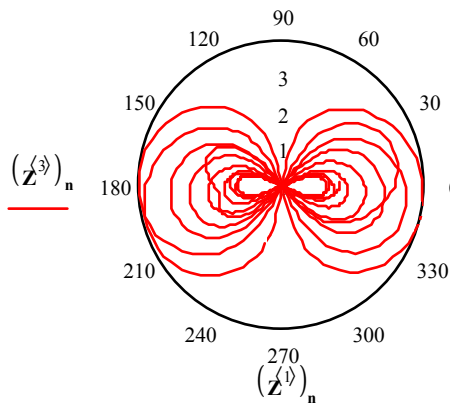
棒1の角変位—角速度(直角座標)



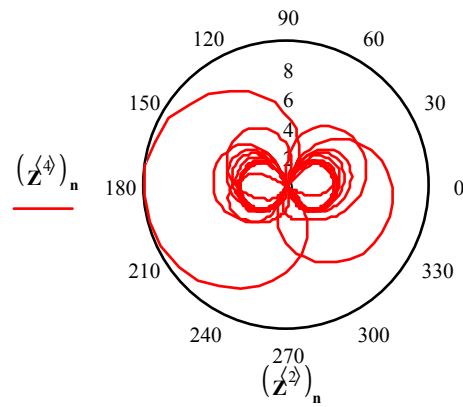
棒2の角変位—角速度(直角座標)



棒1の角変位—角速度(極座標)



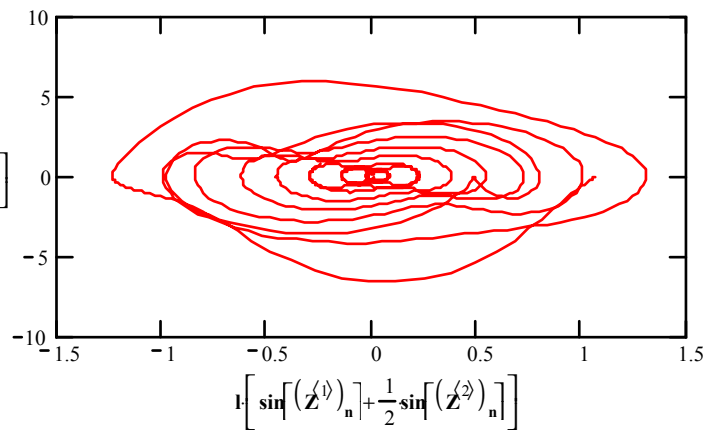
棒2の角変位—角速度(極座標)



棒2の重心の水平変位—水平速度

$$y'_2 \rightarrow l \cdot \theta'_1 \cdot \cos(\theta_1) + \frac{1}{2} \cdot l \cdot \theta'_2 \cdot \cos(\theta_2)$$

$$l \left[ (Z^3)_n \cos[(Z^1)_n] + \frac{1}{2} (Z^4)_n \cos[(Z^2)_n] \right]$$

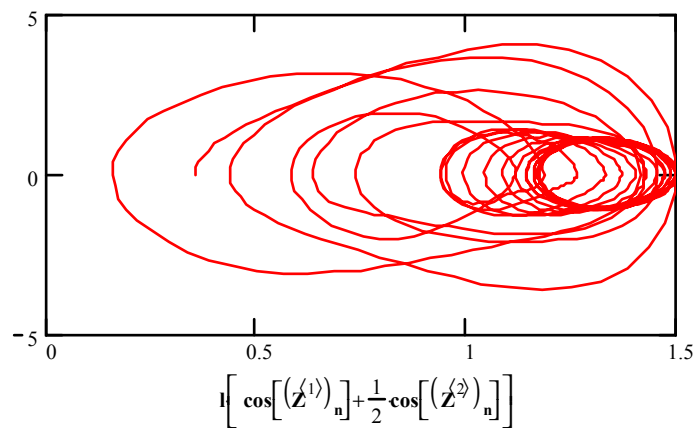


$$y_2 \rightarrow l \cdot \sin(\theta_1) + \frac{1}{2} \cdot l \cdot \sin(\theta_2)$$

$$x'_2 \rightarrow -l \cdot \theta'_1 \cdot \sin(\theta_1) - \frac{1}{2} \cdot l \cdot \theta'_2 \cdot \sin(\theta_2)$$

棒2の重心の垂直変位－垂直速度

$$-l \left[ (Z^{(3)})_n \sin[(Z^{(1)})_n] + \frac{1}{2} (Z^{(4)})_n \sin[(Z^{(2)})_n] \right]$$



$$X_n := l \cdot \left[ \sin[(Z^{(1)})_n] + \frac{1}{2} \cdot \sin[(Z^{(2)})_n] \right]$$

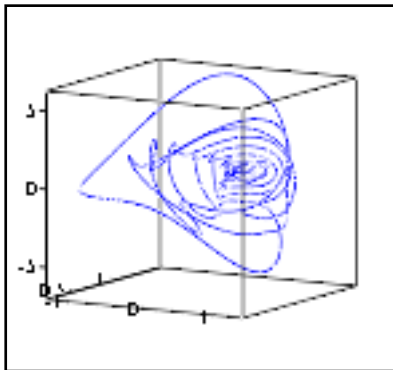
$$x_2 \rightarrow l \cdot \cos(\theta_1) + \frac{1}{2} \cdot l \cdot \cos(\theta_2)$$

$$Y_n := l \cdot \left[ \cos[(Z^{(1)})_n] + \frac{1}{2} \cdot \cos[(Z^{(2)})_n] \right]$$

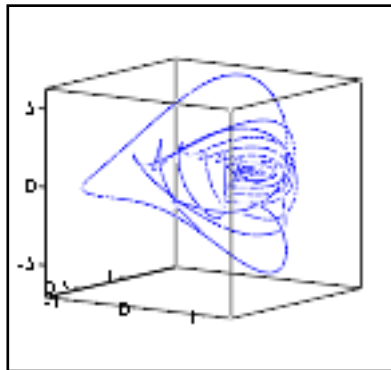
$$V_{X_n} := l \cdot \left[ (Z^{(3)})_n \cdot \cos[(Z^{(1)})_n] + \frac{1}{2} \cdot (Z^{(4)})_n \cdot \cos[(Z^{(2)})_n] \right]$$

$$V_{Y_n} := -l \cdot \left[ (Z^{(3)})_n \cdot \sin[(Z^{(1)})_n] + \frac{1}{2} \cdot (Z^{(4)})_n \cdot \sin[(Z^{(2)})_n] \right]$$

棒2の重心の変位－水平速度(ステレオグラム)

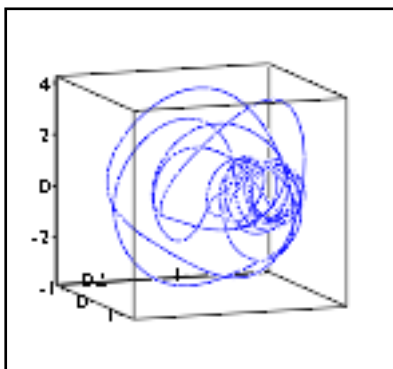


(X, Y, V<sub>X</sub>)

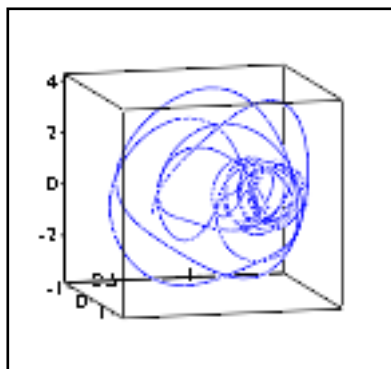


(X, Y, V<sub>X</sub>)

棒2の重心の変位－垂直速度(ステレオグラム)



(X, Y, V<sub>Y</sub>)



(X, Y, V<sub>Y</sub>)

様々な視点から軌跡を見てみると、ランダムな中に隠れた規則性、フラクタル構造が顔をのぞかせる。

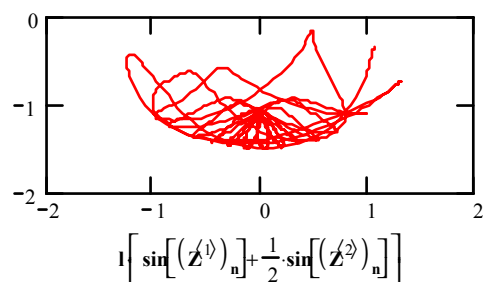
#### 4. 初期条件に対する鋭敏性

さらに、今回の連成振り子において、カオス的といわれる特徴のひとつである不安定性すなわち初期条件に対する鋭敏性について見てみよう。

$$\theta := \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, \theta) := \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \frac{3}{8} \cdot \left( \theta_2 \cdot \theta_3 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_0) - \frac{3}{1} \cdot g \cdot \sin(\theta_0) \right) \\ \frac{3}{2} \cdot \left( -\theta_2 \cdot \theta_3 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_0) - \frac{1}{1} \cdot g \cdot \sin(\theta_1) \right) \end{pmatrix} \quad Z := \text{rkfixed}(\theta, 0, 40, 2000, D)$$

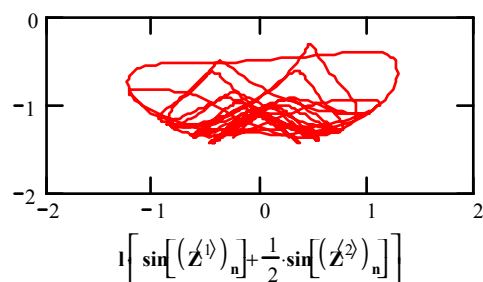
$n := 0 \dots 1000$

$$-l \left[ \cos[(Z^{(1)})_n] + \frac{1}{2} \cos[(Z^{(2)})_n] \right]$$



$n := 1000 \dots 2000$

$$-l \left[ \cos[(Z^{(1)})_n] + \frac{1}{2} \cos[(Z^{(2)})_n] \right]$$



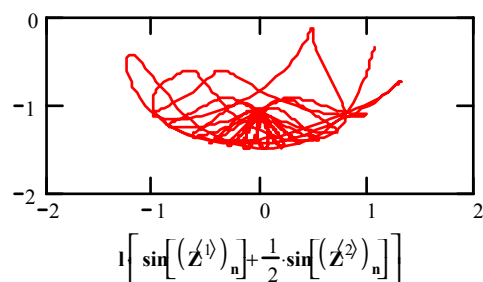
初期条件にわずかな変化  $\delta := 0.004$

を与えてみる。

$$\theta := \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} + \delta \\ \frac{3\pi}{4} + \delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, \theta) := \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \frac{3}{8} \cdot \left( \theta_2 \cdot \theta_3 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_0) - \frac{3}{1} \cdot g \cdot \sin(\theta_0) \right) \\ \frac{3}{2} \cdot \left( -\theta_2 \cdot \theta_3 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_0) - \frac{1}{1} \cdot g \cdot \sin(\theta_1) \right) \end{pmatrix} \quad Z := \text{rkfixed}(\theta, 0, 40, 2000, D)$$

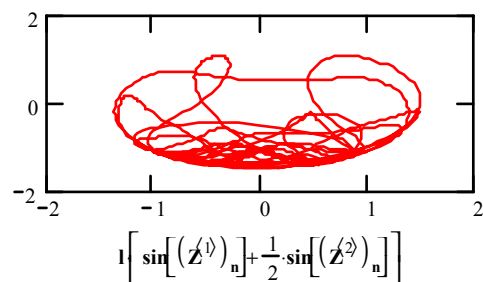
$n := 0 \dots 1000$

$$-l \left[ \cos[(Z^{(1)})_n] + \frac{1}{2} \cos[(Z^{(2)})_n] \right]$$



$n := 1000 \dots 2000$

$$-l \left[ \cos[(Z^{(1)})_n] + \frac{1}{2} \cos[(Z^{(2)})_n] \right]$$



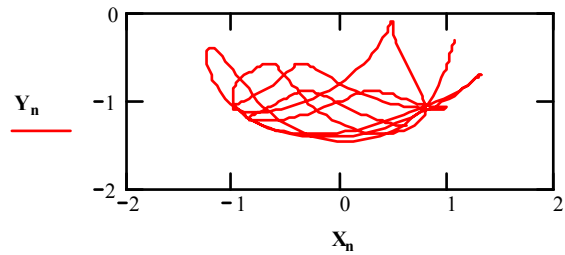
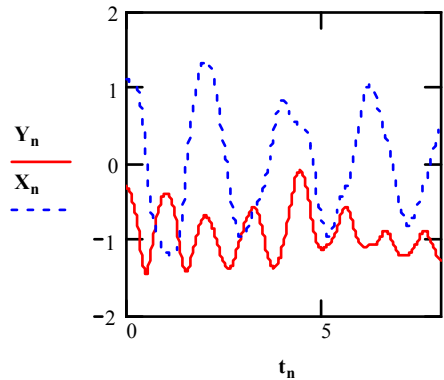
前半はほぼ同じに見えるが、後半の運動にはかなり  $\delta$  の影響が現れている。

## 5. 系のサイズと運動の相似性について

1[m] の振り子を製作するには大きすぎると思い、サイズを縮小しようと考えた。作る前にシミュレートしてみるとほとんど運動が変わらないのに気づいた。単振り子の微小振動で、周期は  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  であるからサイズが1/4になると周期は1/2になる。連成振り子でも同様のことが確認できる。

$$n := 0 \dots 400$$

$$t_n := (Z^{(0)})_n \quad X_n := l \cdot \left[ \sin[(Z^{(1)})_n] + \frac{1}{2} \cdot \sin[(Z^{(2)})_n] \right] \quad Y_n := -l \cdot \left[ \cos[(Z^{(1)})_n] + \frac{1}{2} \cdot \cos[(Z^{(2)})_n] \right]$$



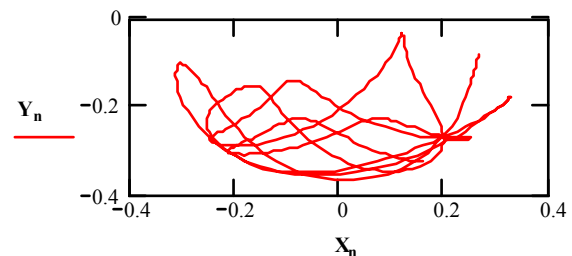
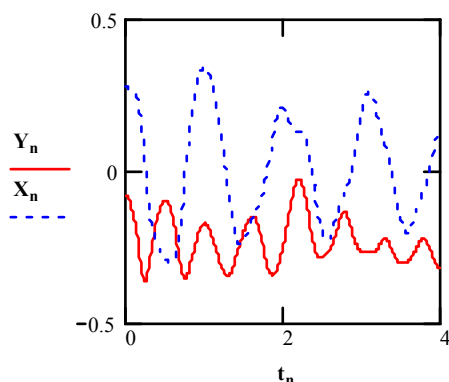
$$l := 0.25$$

$$\theta := \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \frac{3}{8} \cdot \left( \theta_2 \cdot \theta_3 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_0) - \frac{3}{l} \cdot g \cdot \sin(\theta_0) \right) \\ \frac{3}{2} \cdot \left( -\theta_2 \cdot \theta_3 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_0) - \frac{1}{l} \cdot g \cdot \sin(\theta_1) \right) \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{rkfixed}(\theta, 0, 4, 400, D)$$

$$n := 0 \dots 400$$

$$t_n := (Z^{(0)})_n \quad X_n := l \cdot \left[ \sin[(Z^{(1)})_n] + \frac{1}{2} \cdot \sin[(Z^{(2)})_n] \right] \quad Y_n := -l \cdot \left[ \cos[(Z^{(1)})_n] + \frac{1}{2} \cdot \cos[(Z^{(2)})_n] \right]$$



以上の相似性は、初速度0からの自由落下において、半分の時間の落下距離が1/4になることと本質的に同じである。また、このことは一様な重力の仮定からくる帰結である。ケプラーの第3法則すなわち逆二乗力に対しては、

$T \propto a^{1.5}$  が成り立つことと対比してみるとよい。上のような一見複雑な運動も、単振動の重ね合わせで表記できることを考えれば、同様の相似性が成り立つことは納得できることである。結論として、実験のための系のサイズは縮小しても同じ運動の軌跡が得られることがわかる。ただ、時間スケールが  $T \propto a^{0.5}$  となることを考慮すべきである。



## 6. 連成棒振り子の実験

2重に連結した実体振り子を実際につくってみた。15mm角のアルミパイプを使い、長さ30cmのものをベアリングで連結した。ベアリングを使ってもなお減衰は早いですが、初期条件の違いにより実に様々な運動を見せてくれる。

何とか運動を記録しようと思い、マーキングとして手近にあったクリスマスツリーなどに使われているような豆球を振り子に搭載することにした。軽くして運動への影響を少なくするため、電源としてボタン電池を試したが、豆球ではすぐに電圧が降下してしまう。乾電池では重すぎると思い、2.5V-4.7Fのコンデンサを使うことにした。1回の充電で1分程度はもつので、十分記録できる。

シャッター開放で写真にとるのが、軌跡の記録としてはいいのだが、時間とフィルムの無駄を省くためデジタルカメラの動画を使うことにした。コマ送りで再生してみると、速いところではかなり軌跡が流れるが、その部分での速度がわかって結果的にはおもしろい記録をとることができた。

再生画面上で軌跡をトレースしたものを下に示す。減衰が大きいこともあって、シミュレーションで対応するような軌跡を見つけることはできなかったが、カオス的な運動の一端を垣間見ることができる。

