2000.10.20

Mathcad による3次元電気力線の作図

喜多方工業高校　高橋　善樹

3次元の電気力線をつくって立体視できたら，電場のイメージをさらに豊かにできるのではないかと思います。ある文献(1) で試みられていたこの作図を，数学・技術計算ソフト **Mathcad** を用いてやってみたところ，使えそうな図ができたので紹介します。(このレポートは **Mathcad** のワークシートとしてつくられています。)

1．点電荷による球対称場

積分を実行して，力線の3次元方程式を求めてしまうことも可能なのでしょうが，電場の形状によってはかなり困難な計算になるものと思われます。そこで，どんな複雑な静電場であってもその3次元ベクトル場が与えられてさえいれば力線が描けるように，単純にベクトル場を追いかけて流線をたどる方法で作図しました。

電荷から湧き出す力線を等方にするためには，電荷を包む微小な正多面体の頂点を始点にすればよいのでしょうが正多面体の場合最大で20本(十二面体の頂点から)しか力線を引けません。また，場の形状によっては円筒対称に始点を選ぶなどの工夫も考えられます。今回は，安直に電荷近傍の微小立方格子8個の格子点26個を始点としました。

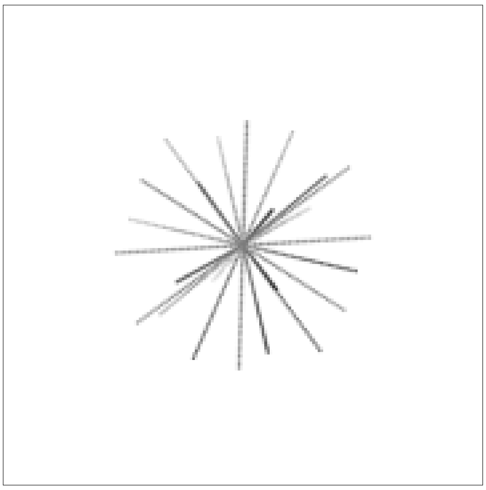
$\boldsymbol{\varepsilon_0} := \dfrac{1}{4\boldsymbol{\pi}}$　　$\mathbf{q} := 1$　（電場の規格化）　　$\mathbf{v}(\mathbf{E}) := 0.2 \cdot \dfrac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|}$　（線素ベクトル）　　$\mathbf{a} := 0.001$

$$\mathbf{r0} := \mathbf{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

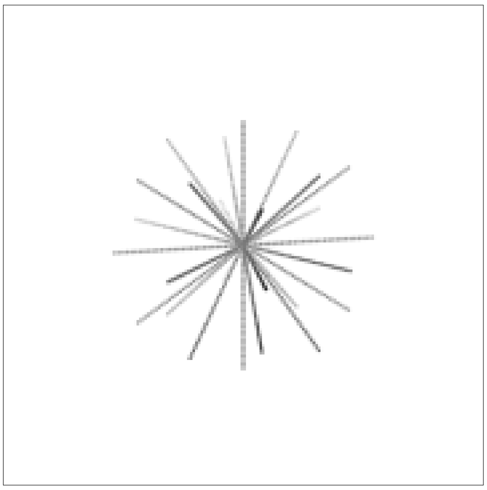
$\mathbf{E}(\mathbf{r}) := \dfrac{\mathbf{q}}{4\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\varepsilon_0}} \dfrac{\mathbf{r}}{(|\mathbf{r}|)^3}$　（電場の方程式）　　$\mathbf{j} := 0 .. 25$　　$\mathbf{r}_{0,\mathbf{j}} := \mathbf{r0}^{\langle \mathbf{j} \rangle}$　　（始点の設定）

$\mathbf{i} := 0 .. 30$　　$\mathbf{r}_{\mathbf{i}+1,\mathbf{j}} := \mathbf{r}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} + \mathbf{v}(\mathbf{E}(\mathbf{r}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}))$

（力線の座標）　$\mathbf{X}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} := (\mathbf{r}_{\mathbf{i},\mathbf{j}})_0$　　$\mathbf{Y}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} := (\mathbf{r}_{\mathbf{i},\mathbf{j}})_1$　　$\mathbf{Z}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} := (\mathbf{r}_{\mathbf{i},\mathbf{j}})_2$



$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$



$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$

同じグラフを2つならべ，視線の方向を5°ずらしてステレオグラムにしました。また，グラデーションをかけて遠近を強調するように設定してみましたが，いかがでしょうか。

2．電気双極子による場

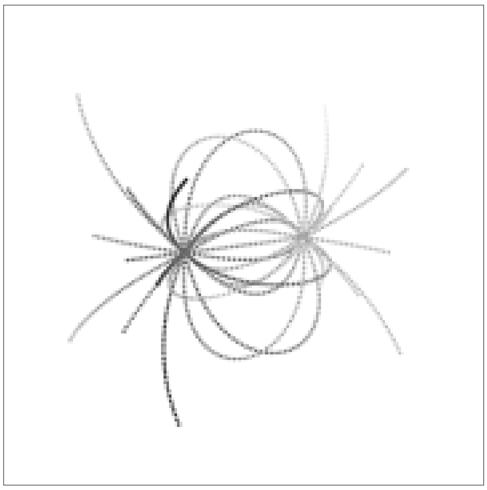
電気力線の図では，教科書などで最もポピュラーな電場ですね。正負の電荷の対がつくる場です。

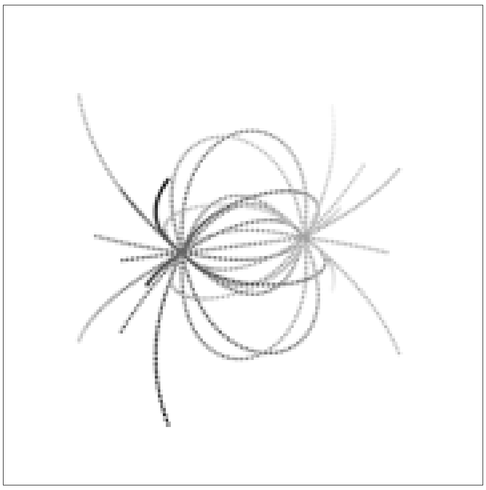
$\mathbf{d} := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　（負電荷の位置）　　$\mathbf{E}(\mathbf{r}) := \dfrac{\mathbf{q}}{4\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\varepsilon_0}} \left[\dfrac{\mathbf{r}}{(|\mathbf{r}|)^3} - \dfrac{\mathbf{r} - \mathbf{d}}{(|\mathbf{r} - \mathbf{d}|)^3} \right]$

$\mathbf{j} := 0 .. 25$　　$\mathbf{r}_{0,\mathbf{j}} := \mathbf{r0}^{\langle \mathbf{j} \rangle}$

$\mathbf{i} := 0 .. 250$　　$\mathbf{r}_{\mathbf{i}+1,\mathbf{j}} := \mathbf{r}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} + \mathbf{v}(\mathbf{E}(\mathbf{r}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}))$

$\mathbf{X}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} := (\mathbf{r}_{\mathbf{i},\mathbf{j}})_0$　　$\mathbf{Y}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} := (\mathbf{r}_{\mathbf{i},\mathbf{j}})_1$　　$\mathbf{Z}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} := (\mathbf{r}_{\mathbf{i},\mathbf{j}})_2$





(X, Y, Z)　　　　(X, Y, Z)

負電荷への吸い込みが1本足りないのは，負電荷の向こうに始点を追加することで解決します。始点を追加して力線を多くすると計算時間は余計にかかるわけですが，上の作図の場合ペンティアム133MHzマシンで10秒程度ですから，そう苦にならないでできそうです。

3．正方4重極子

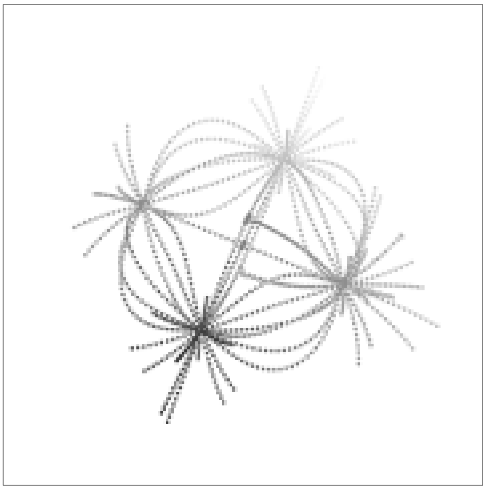
正方形の各頂点に正負の電荷が交互に置かれているときの電気力線を描いてみようと思います。

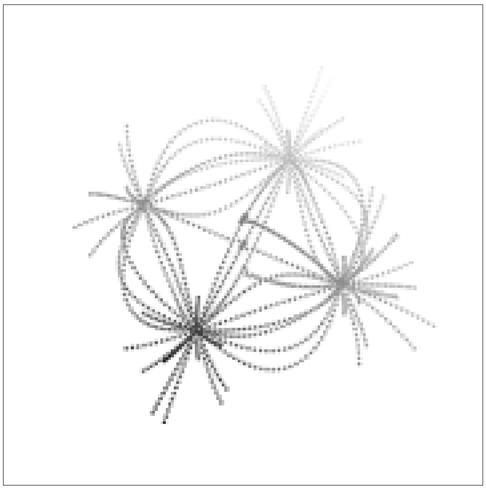
$$\mathbf{d_1} := \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} \quad \mathbf{d_2} := \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} \quad \mathbf{d_3} := \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) := \frac{\mathbf{q}}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\left[\frac{\mathbf{r}}{(|\mathbf{r}|)^3} - \frac{\mathbf{r}-\mathbf{d_1}}{(|\mathbf{r}-\mathbf{d_1}|)^3} + \frac{\mathbf{r}-\mathbf{d_2}}{(|\mathbf{r}-\mathbf{d_2}|)^3} - \frac{\mathbf{r}-\mathbf{d_3}}{(|\mathbf{r}-\mathbf{d_3}|)^3}\right]$$

$$\mathbf{j} := 0..51 \qquad \mathbf{r}_{0,\mathbf{j}} := \begin{cases} \mathbf{r0}^{\langle \mathbf{j}\rangle} & \textbf{if} \quad \mathbf{j} < 26 \\ \left(\mathbf{d_2} + \mathbf{r0}^{\langle \mathbf{j}-26\rangle}\right) & \textbf{otherwise}\end{cases}$$

$$\mathbf{i} := 0..100 \qquad \mathbf{r}_{\mathbf{i}+1,\mathbf{j}} := \mathbf{r}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} + \mathbf{v}\left(\mathbf{E}\left(\mathbf{r}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\right)\right)$$

$$\mathbf{X}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} := \left(\mathbf{r}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\right)_0 \quad \mathbf{Y}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} := \left(\mathbf{r}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\right)_1 \quad \mathbf{Z}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} := \left(\mathbf{r}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\right)_2$$





(X, Y, Z)　　　　(X, Y, Z)

正電荷どうしから対角位置の相手に向かう力線は，通常中央から2つの負電荷の方向に分岐するように描かれますが，今回の方法では，中央付近をうろついてから，誤差の方向によって決められた一方に行かざるを得ません。部分的に力線が半分欠けているように見えるのはそのためです。

この電場で興味深い問題として，正電荷からまっすぐ負電荷方向に向かう力線はどうなるか･･･というものがあります。大方の予想に反して，直線にならずに中央よりにへこむことが，上の図でも確認できます。(2)

<<参考文献>> (1)「いまさら電磁気学？」 青野　修著　パリティ編集委員会編 （丸善）
(2)「YPCニュース　No.123」 横浜物理サークル