

リング振り子

喜多方工業高校 高橋 善樹

3年前のYPC(横浜物理サークル)ニュースNo.114から拾ったテーマです。リングの1点を支点とした振り子は、リングの途中をカットしても等しい周期で振動するが、実験では完全には一致しなかった・・・との報告だけで、残念ながら、その解析や、その後の発展についてはみつけることができませんでした。「振動」にのめりこんだこの夏、また、ちょっとしたのしめそうなテーマの発見でした。

1. リング振り子の運動方程式

支点から中心角 ϕ だけ残して切り欠いたリングについて考える。もとのリングの質量を M とすれば、切り欠いたリングの質量は、

$$m := \frac{\phi}{\pi} \cdot M$$

であり、またその重心は支点から、

$$l_G := \left(1 - \frac{\sin(\phi)}{\phi}\right) \cdot a \quad (a \text{ はリングの半径}) \quad ((\text{注}))$$

だけ下になる。角変位を θ とするとき位置エネルギーと運動エネルギーは、

$$U := -m \cdot g \cdot l_G \cdot \cos(\theta) \quad K := \frac{1}{2} \cdot m \cdot l_G^2 \cdot \theta'^2 + \frac{1}{2} \cdot \left[m \cdot a^2 - m \cdot (a - l_G)^2 \right] \cdot \theta'^2$$

となるから、ラグランジュ方程式を求めれば次のようになる。 (平行軸の定理 $I = I_G + m \cdot R^2$ より)

$$L := K - U \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} := \frac{d}{d\theta} L \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} \rightarrow \frac{-\phi}{\pi} \cdot M \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\sin(\phi)}{\phi}\right) \cdot a \cdot \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta'} := \frac{d}{d\theta'} L \quad \frac{\partial L}{\partial \theta'} \text{ simplify} \rightarrow -2 \cdot M \cdot a^2 \cdot \theta' \cdot \frac{(-\phi + \sin(\phi))}{\pi}$$

$$\frac{\theta' \cdot \partial L}{\partial L_{\theta'}} \text{ simplify} \rightarrow \frac{-1}{2} \cdot \frac{\sin(\theta)}{a} \cdot g$$

整理すると、

$$\theta'' = \frac{-1}{2} \frac{g}{a} \cdot \sin(\theta)$$

すなわち、長さ $l = 2 \cdot a$ の単振り子と等価であり、微小振動におけるその周期は、

$$T(a) := 2\pi \sqrt{\frac{2a}{g}}$$

となり、 ϕ に依存しない。

2. 周期計算と実験

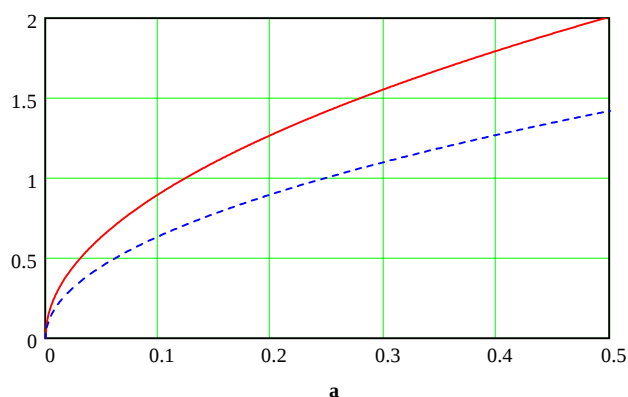
$$g := 9.8 \quad a := 0, 0.001 \dots 0.5$$

$$T(0.1) = 0.898$$

半径 a のリング振り子

長さ a の単振り子

$$\frac{T(a)}{2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}}$$



5mm ϕ のアルミ棒を鍋に合わせて半径10cmに曲げて、 $\phi = \pi \sim \frac{\pi}{3}$ のリング振り子を4通り作って実験した。はじめ、方程式のミスで周期が ϕ に依存する計算結果を得たが、実験はそれをみごとに否定し、ナイフの上で振らしたところすべて同じ周期約 0.91 [sec.] を示した。YPCニュースの写真にあったリングは見るからに幅があり、そのために周期にずれが生じたと思われる。

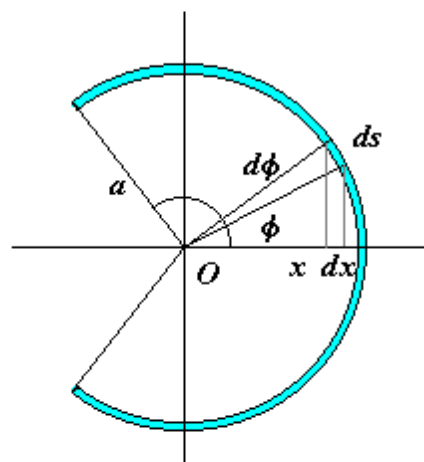
((注)) 切り欠いたリングの重心 -----

右図で、重心の x 座標を x_G とすると、線密度が一樣であれば、

$$x_G = \frac{\int x \, ds}{\int 1 \, ds} \quad ds = a \cdot d\phi \quad x = a \cdot \cos(\phi)$$

となるから、

$$x_G(\phi) = \frac{a^2 \cdot \int_{-\phi}^{\phi} \cos(\phi) \, d\phi}{a \cdot \int_{-\phi}^{\phi} 1 \, d\phi} = \frac{\sin(\phi)}{\phi} a$$



$$\int \cos(\phi) \, d\phi \rightarrow \sin(\phi)$$

座標を問題に合うように直せば、次のようになる。

$$x_G(\phi) := \left(1 - \frac{\sin(\phi)}{\phi}\right) a \quad \phi := 0.01, 0.02 \dots \pi$$

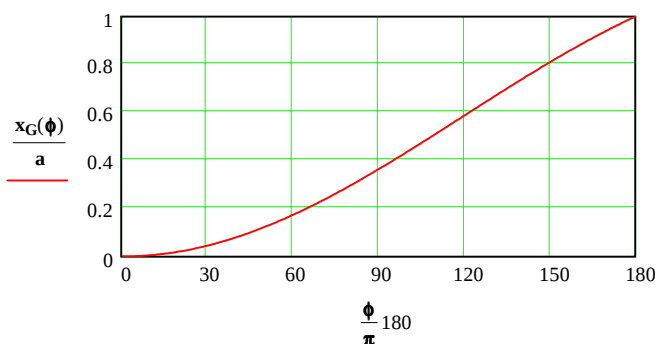
なお、支点を中心とする慣性モーメント I を

直接求めてしまうのもいいかもしれない。

そのときは、運動エネルギーが、

$$K = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \theta'^2$$

となる。



3. 幅のあるリング振子子の ϕ 依存性

ひとまずの目的は果たしたが、さらなる考察としてYPC
ニュースにあった周期のずれを考えてみよう。

半径 r の切り欠きリングの重心は、中心から

$$x_G(r) := \frac{\sin(\phi)}{\phi} r$$

だけずれる。したがって半径 a , 幅 $2d$ のリングの重心のずれは、

$$X_G(\phi) := \frac{\int_{a-d}^{a+d} r \cdot x_G(r) dr}{\int_{a-d}^{a+d} r dr}$$

となる。

$$X_G(\phi) \text{ factor} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \sin(\phi) \cdot \frac{(3 \cdot a^2 + d^2)}{(\phi \cdot a)}$$

座標原点を支点にずらして、幅が半径の1割の場合について計算すると、次のようになる。

$$a := 0.1 \quad d := \frac{1}{20} a \quad \phi := 0.01, 0.02 \dots \pi \quad L_G(\phi) := (a - d) - \sin(\phi) \cdot \frac{\left(a^2 + \frac{d^2}{3}\right)}{(a \cdot \phi)}$$

半径 r , 幅 dr の切り欠きリングの質量は、

面密度を σ とすれば、

$$dm(r) := 2\pi \cdot r \cdot \frac{\phi}{\pi} \cdot dr \cdot \sigma$$

であるから、その中心周りの慣性モーメントは、

$$dI(r) := dm(r) \cdot r^2$$

$$dI(r) \text{ simplify} \rightarrow 2 \cdot r^3 \cdot \phi \cdot dr \cdot \sigma$$

したがって、リング全体の慣性モーメントは、綿密度

$$\sigma = \frac{m}{\pi \cdot [(a+d)^2 - (a-d)^2] \cdot \frac{\phi}{\pi}}$$

により、

$$I := 2 \cdot \frac{m}{(a+d)^2 - (a-d)^2} \cdot \int_{a-d}^{a+d} r^3 dr$$

となる。

$$I = 2 \cdot \sigma \cdot \phi \cdot \int_{a-d}^{a+d} r^3 dr$$

$$I \text{ factor} \rightarrow \phi \cdot M \cdot \frac{(a^2 + d^2)}{\pi}$$

$$I := \phi \cdot M \cdot \frac{(a^2 + d^2)}{\pi}$$

平行軸の定理から、重心のまわりの慣性モーメントは、

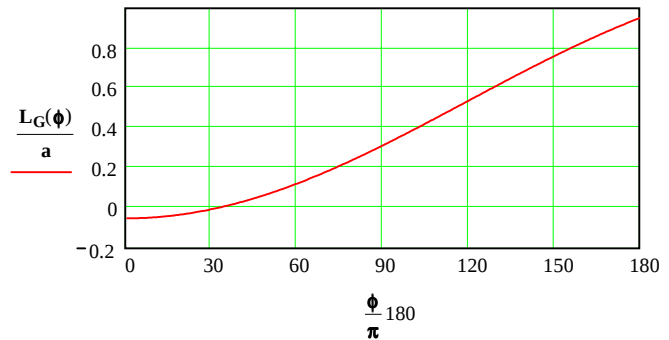
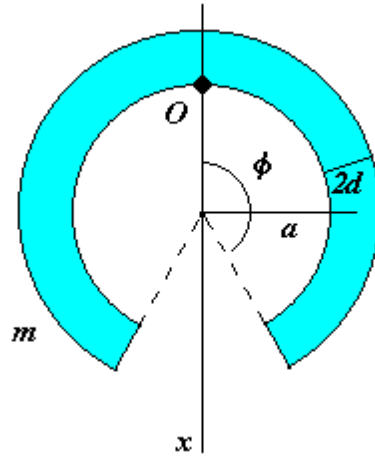
$$I_G := I - m \cdot \left[\sin(\phi) \cdot \frac{\left(a^2 + \frac{d^2}{3}\right)}{(a \cdot \phi)} \right]^2$$

あらためて、位置エネルギーおよび運動エネルギーを求めると、

$$L_G := (a - d) - \sin(\phi) \cdot \frac{\left(a^2 + \frac{d^2}{3}\right)}{(a \cdot \phi)}$$

$$U := -m \cdot g \cdot L_G \cdot \cos(\theta) \quad K := \frac{1}{2} \cdot m \cdot L_G^2 \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_G \cdot \dot{\theta}^2$$

となり、ラグランジュ方程式は次のようになる。



$$L := K - U \quad \partial L_{\theta} := \frac{d}{d\theta} L \quad \partial L_{\theta'} := \frac{d}{d\theta'} L$$

$$\frac{\theta' \cdot \partial L_{\theta}}{\partial L_{\theta'}} \text{ simplify } \rightarrow$$

$$\theta'' = -\frac{B}{A} \cdot g \cdot \sin(\theta)$$

$$A = 3 \cdot a \cdot (a^2 - a \cdot d + d^2) \cdot \phi - (a - d) \cdot (3 \cdot a^2 + d^2) \cdot \sin(\phi)$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot [3 \cdot a \cdot (a - d) \cdot \phi - (3 \cdot a^2 + d^2) \cdot \sin(\phi)]$$

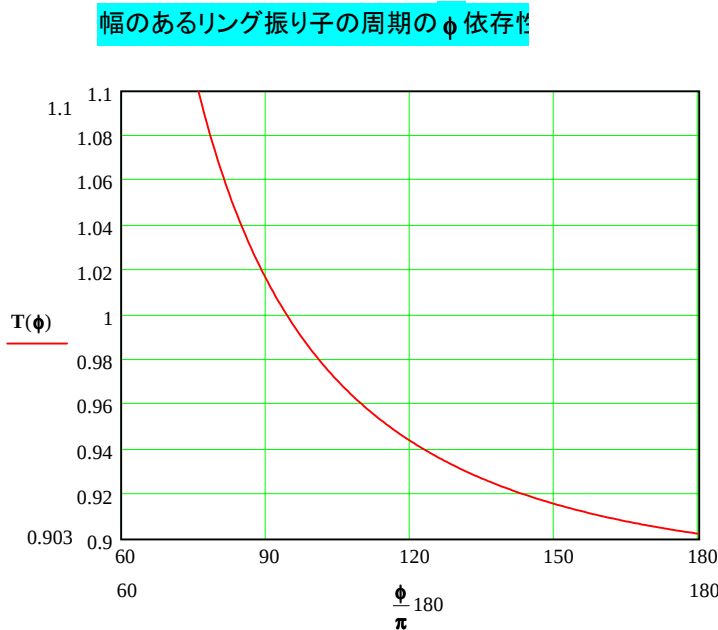
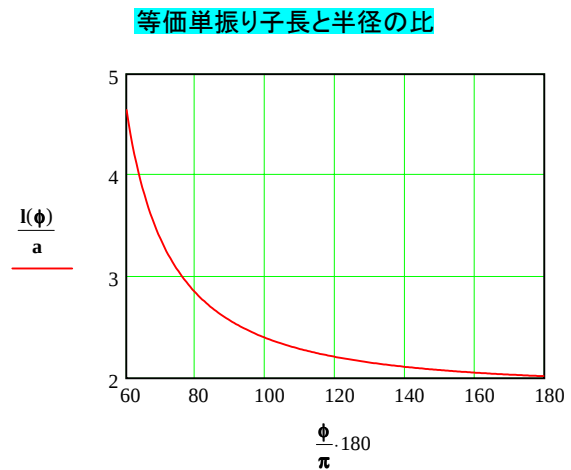
結局、幅のあるリング振り子の周期は、上のA,Bを用いて、 $T = 2\pi \sqrt{\frac{A}{B} \cdot \frac{1}{g}}$ となる。幅が半径の2割の場合について計算してみる。

$$a := 0.1 \quad d := \frac{1}{10} \cdot a \quad \phi_0 := \frac{\pi}{3} \quad \phi := \phi_0, \phi_0 + 0.01 \dots \pi \quad g := 9.8$$

$$l(\phi) := 2 \cdot \frac{3 \cdot a \cdot (a^2 - a \cdot d + d^2) \cdot \phi - (a - d) \cdot (3 \cdot a^2 + d^2) \cdot \sin(\phi)}{3 \cdot a \cdot (a - d) \cdot \phi - (3 \cdot a^2 + d^2) \cdot \sin(\phi)} \quad (\text{等価単振り子の長さ})$$

$$T(\phi) := 2\pi \sqrt{\frac{l(\phi)}{g}}$$

工作用紙でいくつか幅のあるリング振り子をつくり、実験したところ、測定精度の範囲でほぼ満足できる一致をみた。(× = 実験値)



$$\begin{aligned} T\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1.017 \\ \frac{30}{29} &= 1.034 \\ T\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= 0.944 \\ \frac{30}{32} &= 0.938 \\ T\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= 0.916 \\ \frac{60}{66} &= 0.909 \end{aligned}$$

結論として、幅の無視できないリング振り子では、切り欠きが大きいくほど(φが小さいほど)周期が長くなることが、理論上も確認することができた。