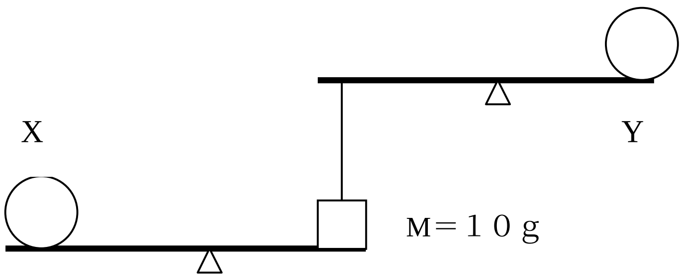
多段天秤のつりあい

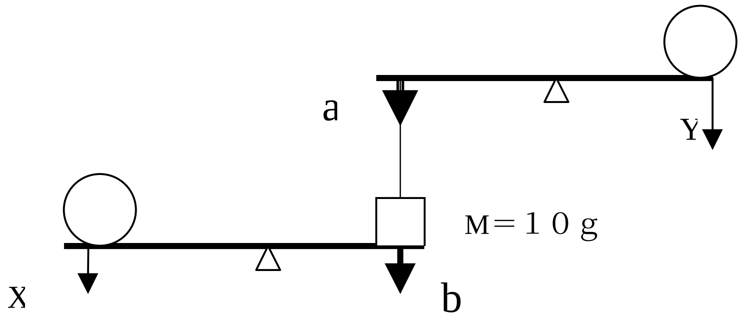
喜多方東高等学校　　三浦　彰

　学校の化学室の片隅に眠っている上皿天秤を使って、遊び半分に図のようなつりあいの問題を考えてみた。



　右上の天秤の左腕に１０ｇのおもりＭを糸で下げ、左下の天秤の右皿に乗せる。糸がたるまず、おもりＭが皿から離れることなく二つの天秤をつりあわせるにはＸとＹに何ｇのおもりを乗せれば良いか。

［解答］



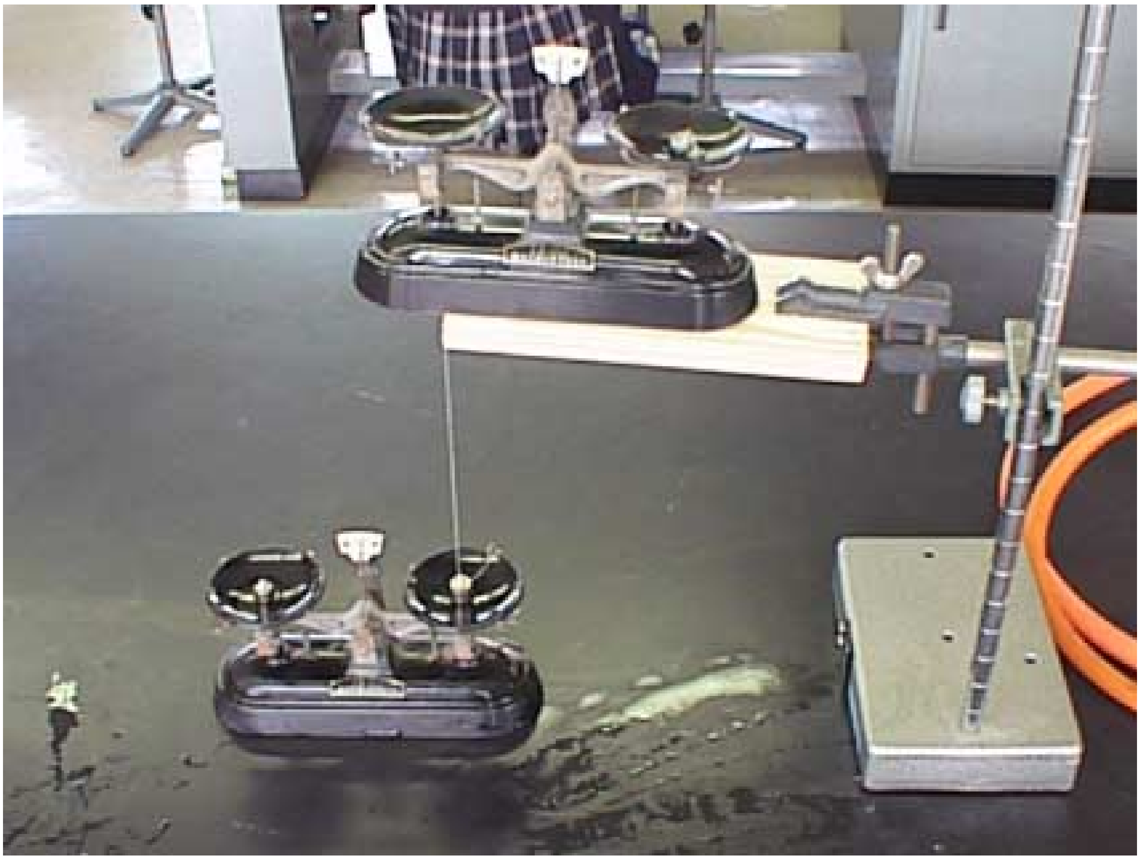
おもりＭの加重を上段の左腕にａ、下段の右腕にはｂとし、腕の長さはすべてlとすると、つりあいの式は次のようになる。

$$\left.\begin{array}{l} a + b = M \\ l \cdot x = l \cdot b \cdots\cdots \quad x = b \\ l \cdot a = l \cdot Y \cdots\cdots \quad a = Y \end{array}\right\}$$

３式より、$X + Y = M$　となる。

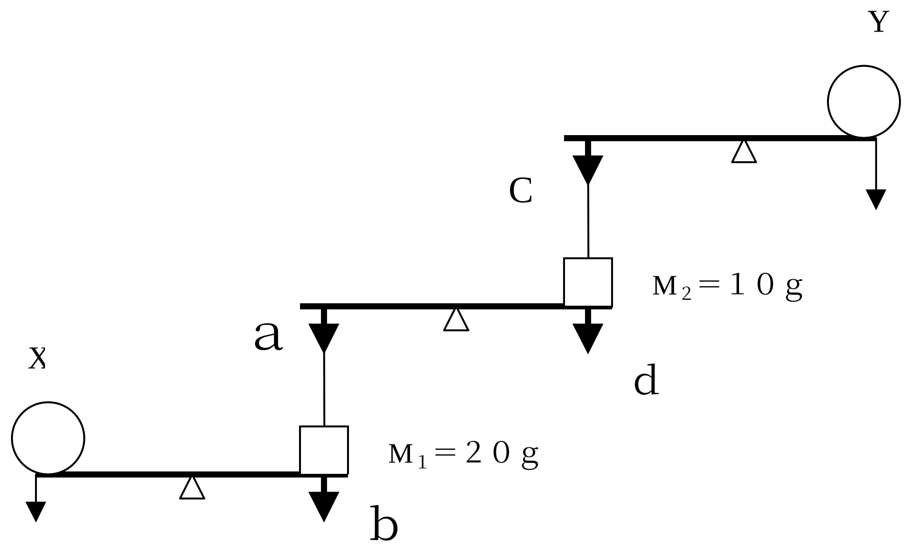
したがって、この場合は

（１g，９g）、（２g，８g）、（３g，７g）、（４g，６g）、（５g，５g）の組み合わせとなる。



次に、天秤を３つにして、３段にすると。

（おもりは、仮に１０ｇと２０ｇとする）



おもりの条件

$a+b=M_1$　，$C+d=M_2$

つりあいの条件（モーメントの腕の長さlはすべて同じなので省略）

$X=b$,　　$a=d$,　　$C=Y$

以上の式から、

$X-Y=M_1-M_2$　となる。

　従って、この場合はM_1-M_2＝１０ｇだから、$X-Y$＝１０ｇとなるＸとＹの組み合わせ(無数？)となる。

例えば、（２０ｇ，１０ｇ）、（３０ｇ，２０ｇ）、（４０ｇ，３０ｇ）、など。

　ただし、$M_1<M_2$の場合は$X<Y$の組み合わせとなる。

　さらに、天秤の数を増やして４つ（４段）、５つ（５段）、・・・ｎ個（ｎ段）と増や

せば理論上どうなるのだろうか、と思い順次式を調べてみると。

４つ（４段）の時

$X+Y=M_1-M_2+M_3$

５つ（５段）の時

$X-Y=M_1-M_2+M_3-M_4$

６つ（６段）の時

$X+Y=M_1-M_2+M_3-M_4+M_5$

７つ（７段）の時

$X-Y=M_1-M_2+M_3-M_4+M_5-M_6$

となり、規則性がみられる。

〔結論〕

天秤の数が**奇数**のとき左辺（XとYの関係）は「　**X－Y**　」、

右辺は $\mathbf{M_n}$　（ｎ＝天秤の数－１）で偶数となる。

$$X-Y=M_1-M_2+M_3-\cdots+M_{n-1}-M_n$$

※だから、天秤が１つのときは $X-Y=M_0$ で $M_0=0$ ｇだから $X-Y=0$
すなわち、　$X=Y$ となる。

天秤の数が**偶数**のとき左辺（XとYの関係）は「　**X＋Y**　」、

右辺は $\mathbf{M_n}$　（ｎ＝天秤の数－１）で奇数となる。

$$X+Y=M_1-M_2+M_3-\cdots-M_{n-1}+M_n$$

◎ 以上のようにまとめましたが、間違いや疑問点がありましたら、ご指摘いただきとうございます。