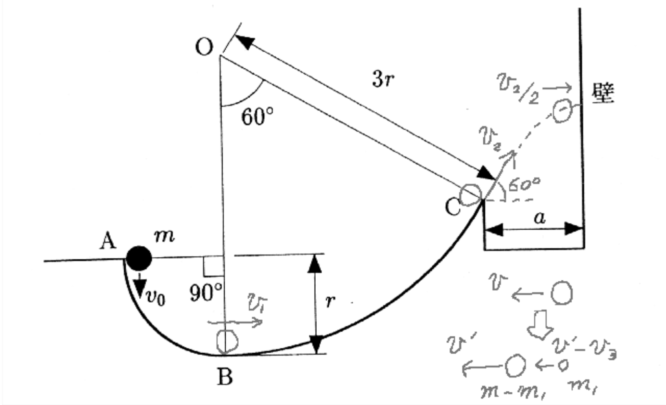
2006 東北大学入試物理問題研究

力学，電気，波動の 3 問で構成されている。いずれも基本から応用にいたるレベルの小問が用意されているが，限りある時間の中で全問解答は困難であろう。後半の難易度の高い小問にどれだけくらいつくことができたかが成否をわける。

※　ある物理量を他の量で表す場合,【　】の中から必要なものを用いる。

［1］力学（スノーボードの平面運動）

スノーボードがハーフパイプからとびだして壁に衝突するという場面設定。



(1)　初速 $v_0 = 0$ でのすべりだし

(a)　最下点での速さ v_1【m, r, g】
（力学的エネルギー保存）**［基本］**

力学的エネルギー保存則により，

$$\begin{aligned} mgr &= \frac{1}{2}m{v_1}^2 \\ \therefore \quad v_1 &= \sqrt{2gr} \quad // \end{aligned}$$

(b)　最下点通過前後の垂直抗力の比 N'/N（円運動）**［標準］**

点 B を通過する直前における半径方向の運動方程式は,

$$m\frac{{v_1}^2}{r} = N - mg \qquad \therefore \quad N = m(\frac{{v_1}^2}{r} + g) = 3mg$$

直後について同様に,

$$m\frac{{v_1}^2}{3r} = N' - mg \qquad \therefore \quad N' = m(\frac{{v_1}^2}{3r} + g) = \frac{5}{3}mg$$

となるから，両者の比をとって

$$\frac{N'}{N} = \frac{5}{9} \quad //$$

(2)　初速 $v_0 = 2\sqrt{gr}$ でのすべりだしと壁への垂直衝突

(a)　とびだす速さ v_2【m, r, g】（力学的エネルギー保存）**［標準］**

力学的エネルギー保存則により，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgr &= \frac{1}{2}m{v_2}^2 + mg\cdot\frac{3}{2}r \\ \therefore \quad v_2 &= \sqrt{{v_0}^2 - gr} \\ &= \sqrt{3gr} \quad // \end{aligned}$$

(b)　とびだし点から壁までの距離 a【m, r, g】（斜方投射）**［標準］**

C 点をとびだしてから衝突までの時間を t とすると，垂直に衝突したから

$$v_2 \sin 60^\circ - gt = 0 \qquad \therefore \quad t = \frac{\sqrt{3}v_2}{2g} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$$

よって求める距離は,

$$\begin{aligned} a &= v_2 \cos 60^\circ \cdot t \\ &= \sqrt{3gr} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \;=\; \frac{3\sqrt{3}}{4}r \quad // \end{aligned}$$

(c)　反発係数 e で衝突直後，質量 m_1 の物体を水平に投げて，点 C にもどるために必要な投射の相対的速さ v_3【m, m_1, r, g, e】（運動量保存）**［発展］**

衝突直後の速さ v は，反発係数 e により

$$v = ev_2 \cos 60^\circ = \frac{1}{2}ev_2$$

である。物体を投げた直後の速度を左向きに v' とすると，物体の速度は左向きに $v' - v_3$ だから，運動量保存則により

$$mv = (m - m_1)v' + m_1(v' - v_3)$$

すなわち，

$$mv = mv' - m_1 v_3$$

である。このとき運動の対称性から，$v' = v_2 \cos 60^\circ$であればボードは点 C にもどる。

$$\begin{aligned} \therefore \quad v_3 &= \frac{m(v' - v)}{m_1} \\ &= \frac{m}{m_1} v_2 \cos 60^\circ (1 - e) \\ &= \frac{m(1-e)}{2m_1}\sqrt{3gr} \quad // \end{aligned}$$

(d)　投げた物体が壁に沿って落下するときの質量 m_1【m, r, g, e】（相対速度）**［発展］**

投げたときの速度が 0 であればよい。

$$\begin{aligned} v' - v_3 &= 0 \\ \text{すなわち，} \quad \frac{m}{m_1}(1-e) &= 1 \\ \therefore \quad m_1 &= m(1-e) \quad // \end{aligned}$$

[2] 電気（ダイオードとコンデンサーを含む回路）

ダイオードと並列につないだコンデンサーの充放電。ダイオードの特性は，

$V_D < v$　のとき　　$I_D = 0$

$V_D \geq v$　のとき　　$\mathit{\Delta} I_D = \dfrac{\Delta V_D}{r}$

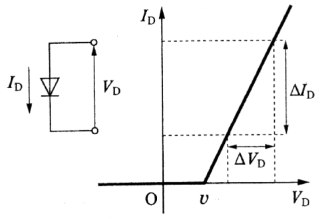


図 1

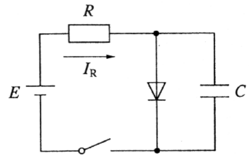


図 2

(1)　スイッチを閉じた直後に抵抗に流れる電流 I_R【E, v, R, r, C】 **[基本]**

初めコンデンサーの電荷は 0 だから，極板間の電位差は 0。したがって，

$$I_R = \frac{E}{R} \quad //$$

(2)　スイッチを閉じて十分に時間が経過。

(a)　$E < v$ の場合，電圧 V_D と電荷 Q【E, v, R, r, C】 **[基本]**

$E < v$ だからダイオードに電流は流れない。したがって，

$$\begin{aligned} V_D &= E \quad // \\ Q &= CE \quad // \end{aligned}$$

(b)　$E > v$ の場合，$V_D = \dfrac{rE + Rv}{r + R}$ を導出。ダイオードの消費電力 P_D【E, v, R, r, C】 **[標準]**

このときダイオードに流れる電流を I_D とすれば，

$$I_D = \frac{V_D - v}{r} \qquad (1)$$

$$E - V_D = RI_D \qquad (2)$$

が成り立つ。これらから I_D を消去すれば，

$$\begin{aligned} E - V_D &= \frac{R(V_D - v)}{r} \\ \left(1 + \frac{R}{r}\right) V_D &= E + \frac{R}{r} v \\ \therefore \quad V_D &= \frac{r}{r + R}\left(E + \frac{R}{r} v\right) \\ &= \frac{rE + Rv}{r + R} \quad // \end{aligned}$$

このとき，ダイオードを流れる電流は式 (1) より

$$I_D = \frac{\dfrac{rE + Rv}{r + R} - v}{r} = \frac{E - v}{r + R}$$

となるから，ダイオードの消費電力は

$$P_D = I_D V_D = \frac{(E - v)(rE + Rv)}{(r + R)^2} \quad //$$

(3)　時刻 $t=0$ にスイッチを開き，十分に時間が経過して電流が一定になるまでの変化を追う。
以下では $E>v$ とする。

初期条件は,

$$\begin{aligned} V_D &= \frac{rE+Rv}{r+R} \\ I_D &= \frac{E-v}{r+R} \\ Q &= \frac{C(rE+Rv)}{r+R} \end{aligned}$$

(a)　電流 I_D と，電荷 Q の時間変化を表すグラフ選択。
それぞれに対する $t=0$ での値 A および定常状態での値 B【E,v,R,r,C】 **[発展]**

I_D：時間経過とともに Q が減少し，$V_D=Q/C$ が減少するから一様減少　→（イ）//

$$\begin{aligned} A &= \frac{E-v}{r+R} \quad // \\ B &= 0 \quad // \end{aligned}$$

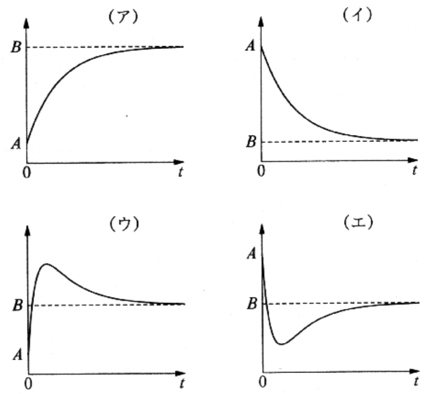


図 3

Q：I_D によって流出するから一様減少　→（イ）//
電圧が $V_D=v$ まで下がると $I_D=0$ になって定常状態になる。

$$\begin{aligned} A &= \frac{C(rE+Rv)}{r+R} \quad // \\ B &= Cv \quad // \end{aligned}$$

[参考]

Q および I_D に対して，次の方程式が成り立つ。

$$Q = CV_D = C(rI_D+v)$$
$$I_D = -\frac{dQ}{dt}$$

Q を代入すると,

$$I_D = -Cr\frac{dI_D}{dt}$$

となり，積分すると

$$\int_{I_D(0)}^{0}\frac{dI_D}{I_D} = -\int_0^t \frac{dt}{Cr}$$
$$\therefore \quad \log\frac{I_D}{I_D(0)} = -\frac{t}{Cr}$$

これを整理すれば,

$$\begin{aligned} I_D(t) &= I_D(0)\cdot e^{-\frac{t}{Cr}} \\ Q(t) &= C(rI_D(0)\cdot e^{-\frac{t}{Cr}}+v) \\ &= (Q(0)-Cv)\cdot e^{-\frac{t}{Cr}}+Cv \end{aligned}$$

を得る。ただし，$t=0$ における値は

$$I_D(0) = \frac{E-v}{r+R} \qquad Q(0) = \frac{C(rE+Rv)}{r+R}$$

である。

(b) 定常状態のコンデンサーの静電エネルギーを U，定常状態になるまでのダイオードの消費エネルギーを W とするとき，$W = 3U$ となるための E【v, R, r, C】**［標準］**

定常状態のコンデンサーの電圧は v であるから，

$$U = \frac{1}{2}Cv^2$$

また，$t = 0$ における静電エネルギーは

$$U_0 = \frac{1}{2}C\left(\frac{rE + Rv}{r + R}\right)^2$$

である。

$$W = U_0 - U = 3U$$

となるためには，

$$U_0 = 4U$$

であればよい。すなわち，

$$\frac{1}{2}C\left(\frac{rE + Rv}{r + R}\right)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}Cv^2$$

$$\therefore \quad \frac{rE + Rv}{r + R} = 2v$$

これを E について解けば，

$$E = \frac{2r + R}{r} \cdot v \quad //$$

[3] 波動（複プリズムによる干渉と屈折率測定）

空気の屈折率は 1 とする。

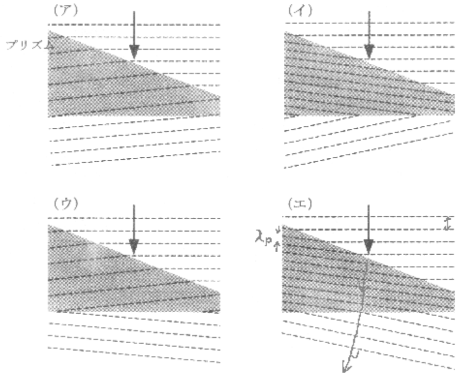


図 2

(1)　断面が直角三角形のプリズムへの平面波の入射。

(a)　屈折波の波面の変化を示す図の選択。**[基本]**

（エ）//

(b)　選択の理由。**[基本]**

プリズムによって光の射線は図のように屈折する。波面は射線に垂直であり，またプリズム内部では光速がおそくなって波長が短縮することを考え合わせると,（エ）が相当する。

(2)　複プリズム（頂角 α，屈折率 n_p）への平面波（波長 λ）入射と屈折波（入射方向から角度 θ）の干渉，その応用としての屈折率測定。ただし，α，θ はともに小さく，$\sin\alpha \quad \tan\alpha \quad \alpha$ などとしてよい。

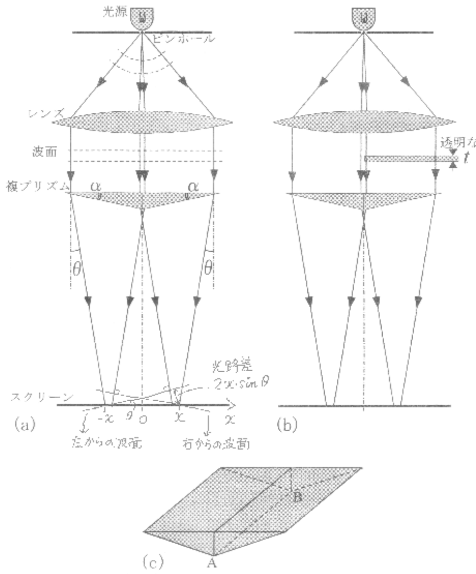


図 3

(a)　複プリズム内での波長 λ_p を λ, n_p で表す。**[基本]**

屈折率は媒質中の光速の比すなわち波長の比に等しい。

$$n_p = \frac{\lambda}{\lambda_p} \qquad \therefore \quad \lambda_p = \frac{\lambda}{n_p} \quad //$$

(b)　複プリズムで光が曲げられる角度 θ を α, n_p で表す。**[基本]**

光が複プリズムを出るとき，入射角は α，屈折角は $\alpha+\theta$ だから,

$$n_p = \frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha} \qquad \frac{\alpha+\theta}{\alpha} = 1 + \frac{\theta}{\alpha}$$

$$\therefore \quad \theta \qquad \alpha\,(n_p - 1) \quad //$$

(c)　スクリーン上に生じる任意の 2 本の明線の間隔 l【λ, n_p, θ, 正整数 k】**[発展]**

スクリーンの中央を原点とし右方向に x 軸をとる。今，座標 x の点に右のプリズムからきた波面が到達したとすると，それと同時に左のプリズムからきた同位相の波面は座標 $-x$ の点に到達する。後者と座標 x の点との距離が光路差となるから，強めあう条件は

$$2x\sin\theta \quad 2x\cdot\theta = m\lambda \qquad (m：\text{整数})$$

$$\therefore \quad x = \frac{m\lambda}{2\theta}$$

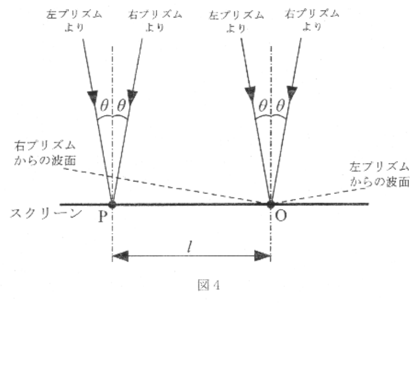
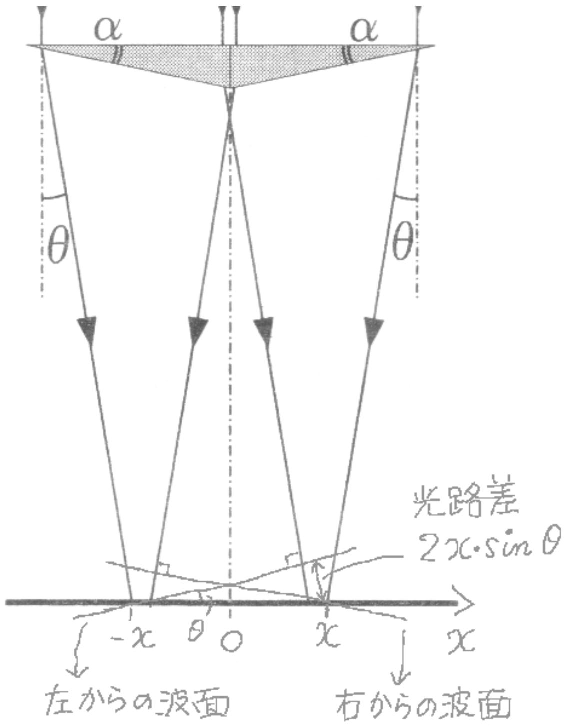


図 4

となる。したがって，任意の明線の間隔は

$$l = \frac{k\lambda}{2\theta} \quad //$$



(d)　屈折率 n，厚さ t の膜を右側のプリズムの上に入れた場合, 干渉じまは左右どちらにずれるか。
また，干渉じまの間隔を d，そのずれを δ とするときの屈折率 n を δ, t, λ, d で表す。
ただし，$2t(n-1) < \lambda$　。　**［発展］**

光学的距離は，膜を入れた右側の光線について $(n-1)t$ だけ伸びるから,

干渉じまは右にずれる。//

このとき強め合う条件は,

$$2x \cdot \theta - (n-1)t = m\lambda$$
$$\therefore \quad x = \frac{m\lambda}{2\theta} + \frac{(n-1)t}{2\theta}$$

となり，第 2 項がずれに相当するから

$$\delta = \frac{(n-1)t}{2\theta}$$

である。また，干渉じまの間隔 d より,

$$d = \frac{\lambda}{2\theta} \qquad \therefore \quad \theta = \frac{\lambda}{2d}$$

したがって膜の屈折率は,

$$n = 1 + \frac{2\theta \cdot \delta}{t} = 1 + \frac{\lambda\delta}{td} \quad //$$